Ganzrationale Funktionen

Definition: *Eine Funktion ist ganzrational, wenn diese auf Summen von x-Potenzen mit positiven Exponenten mit Faktoren besteht z.B.* $f(x)=2x^5-15x^3+2x^2$

Beispiel:
$f(x)=2x^5-15x^3+2x^2$ => *Grad(f)*
KA: Ergebnis 1P, Schreibweise 1P

Symmetrien

Regel: *Eine Funktion ist achsensymmetrisch, wenn*

- *alle Exponenten der x-Potenzen gerade sind*

Beispiele: *(a.)* $f(x) = 4x^4+7x^2$
$f(-x) = 4(-x)^4+7(-x)^2 = 4x^4+7x^2$
=> *f ist achsensymmetrisch, da alle Exponenten der x-Potenzen gerade sind*

Regel: *Eine Funktion ist punktsymmetrisch, wenn*

- *alle Exponenten der x-Potenzen ungerade sind*

Beispiele: *(b.)* $f(x) = 7x^5-6x^3$
=> *f ist punktsymmetrisch, da alle Exponenten der x-Potenzen ungerade sind*

(c.) $f(x) = -3x^3+7x^2+4$
$f(-x) = -3(-x)^3+7(-x)^2+4 =3x^3+7x^2+4$
$-f(-x) = -3x^3-7x^2-4$
=> *f ist punktsymmetrisch, da es gerade und ungerade Exponenten beiden den x-Potenzen gibt*

Uneigentliche Grenzwerte

Einführendes Beispiel: *$f(x) = x^3-x$*

$N_1(-1/0)$; $N_2(0/0)$; $N_3(1/0)$

(a.) Wie verläuft meine Funktion für große x-Werte?

x	f(x)
10	990
100	999.900
1000	999.999.000
10000	999.999.990.000

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

Sprich: Limes x gegen unendlich von eff von ix ist gleich unendlich

(b.) Wie verläuft meine Funktion für kleine x-Werte?

x	f(x)
-10	-990
-100	-999.900
-1000	-999.999.000
-10000	-999.999.990.000

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Beispiele:

Bestimmen Sie die uneigentlichen Grenzwerte von f!

(a.) f(x) = $-2x^4+5x^3-3x^2$

(a_1.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2x^4+5x^3-3x^2\right)=-\infty$

- *Wir betrachten die x-Potenz mit dem höchsten Exponenten x^4, da dieser am stärksten wächst/fällt!*
- *Für x->∞ strebt x^4-> ∞*
- *Für x->∞ strebt $-2x^4$-> -∞*

(a_2.) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4+5x^3-3x^2\right)=-\infty$

- *Wir betrachten die x-Potenz mit dem höchsten Exponenten x^4, da dieser am stärksten wächst/fällt!*
- *Für x->-∞ strebt x^4-> ∞*
- *Für x->-∞ strebt $-2x^4$-> -∞*

(b.) f(x) = $-2x^5+5x^3-3x^2$

(b_1.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2x^4+5x^3-3x^2\right)=-\infty$

- *Wir betrachten die x-Potenz mit dem höchsten Exponenten x^4, da dieser am stärksten wächst/fällt!*
- *Für x->∞ strebt x^5-> ∞*
- *Für x->∞ strebt $-2x^5$-> -∞*

(b_2.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2x^4+5x^3-3x^2\right)=-\infty$

- *Wir betrachten die x-Potenz mit dem höchsten Exponenten x^4, da dieser am stärksten wächst/fällt!*
- *Für x->-∞ strebt x^5-> -∞*
- *Für x->-∞ strebt $-2x^5$-> ∞*

$$\lim_{x\to-\infty} x^n=\left\{\begin{matrix}\infty;\, n\ gerade\\ -\infty;\, n\ ungerade\end{matrix}\right\}$$

Nullstellen von $f(x)= x^n-a$: $x^n=a$

Beispiele: $f(x) = x^2-4$

(a.) $x^2-4 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow \cancel{x = \sqrt{4} \vee x = -\sqrt{4}}$

$\Rightarrow x = 2 \vee x = -2$

$\Rightarrow L=\{-2;2\}$

$x^2= -4$

$\Rightarrow L=\{\}$

(b.) $x^3 = 8$

$\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow L=\{2\}$

$x^3= -8$

$\Rightarrow \cancel{x = -\sqrt[3]{|-8|}}$

$\Rightarrow L=\{-2\}$

(c.) $x^4 = 16$

$\Rightarrow x^4 = -2 \vee x = 2$

$\Rightarrow L=\{-2;2\}$

$x^4= -16$

$\Rightarrow L=\{\}$

(d.) $x^5 = 32$

$\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow L=\{2\}$

$x^5= -32$

$\Rightarrow L=\{-2\}$

Satz: $x^n = a$

n ist gerade, $a>0$:	2 Lösungen
n ist ungerade:	1 Lösung
n ist gerade, $a<0$:	0 Lösungen

Nullstellen von $f(x)= ax^n+bx^m$

Es gibt max. 3 Nullstellen, da Grad(f)=3

Beispiele: (a.) $f(x) = -2x^5+10x^4$ | $f(x)=0$

$x^4(-2x+10)= 0$ | Teilen durch den Faktor vor dem

=> $x^4(-2x+10) = 0$ | Ausklammern von der kleinsten x-Potenz

=> $x^4 =0 \vee -2x+10 = 0$ | Satz vom Nullprodukt

=> $x =0 \vee x =0\ x =0 \vee x =0 \vee \vee -2x=-10$

=> $x =0 \vee x =0 \vee x =0 \vee x =5$

=> $N_1(0/0); N_2(5/0)$

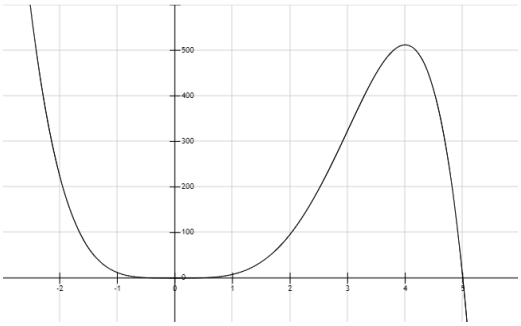
N_1

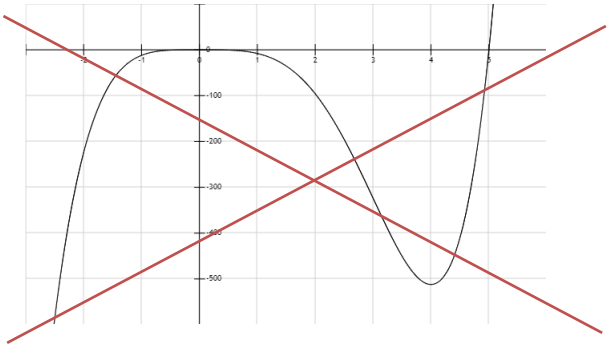
=> VF: 4; VF:1

Mit den uneigentlichen Grenzwerten:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

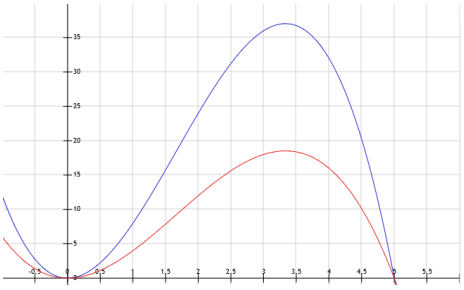
$(-\infty;\infty)$ ergeben sich folgenden mögliche Verläufe:





Die Nullstellen mit Vielfachheit 1(ungerade VF) schneidet die x-Achse, die Nullstelle mit Vielfachheit 4(gerade VF) berührt, die x-Achse: Daher ist der linke Funktionsgraph der zu f gehörige!

Zwei mögliche Verläufe wären:



x^1 *

Linearfaktordarstellung der Funktion:

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$

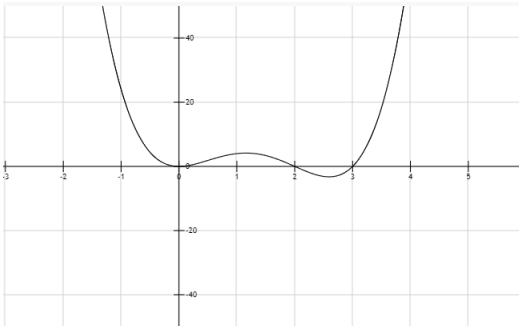
Nullstellen

=> $f(x) = (x-0)(x-0)\ (x-0)\ (x-0)\ (x-5) =x^4(x-5)$

Satz: *Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat maximal n Nullstellen!*

Satz: *Wenn f eine ganzrationale Funktion ist und eine Nullstelle mit Vielfachheit k hat, gilt:*
k ungerade-> G_f schneidet die x-Achse
k gerade -> G_f berührt die x-Achse

Beispiele: *(b.)* $2x^4-10x^3+12x^2=0$
$\Rightarrow 2x^2(x^2-5x+6)=0$
$\Rightarrow 2x^2=0 \vee x^2-5x+6=0$
$\Rightarrow x=0 \vee x=0 \vee x^2-5x+6=0$
$\Rightarrow x=0 \vee x=0 \vee x=3 \vee x=2$
$\Rightarrow N_1(0/0)$; $N_2(2/0)$; $N_3(3/0)$
$\Rightarrow$ VF: 2; VF: 1; VF: 1



Linearfaktordarstellung: $f(x)=(x-0)(x-0)(x-2)(x-3)=x^2(x-2)(x-3)$

Beispiele: *Bestimmen Sie zur jeder Funktion Symmetrien, uneigentliche Grenzwerte, Nullstellen, zwei mögliche Verläufe von Gf (und die Linearfaktordarstellung)!*
(a.) $f(x)=x^3(x-1)^2=x^3(x^2-2x+1)=x^5-2x^4+x^3$

(1.) Uneigentliche Grenzwerte(Kurzform!!):

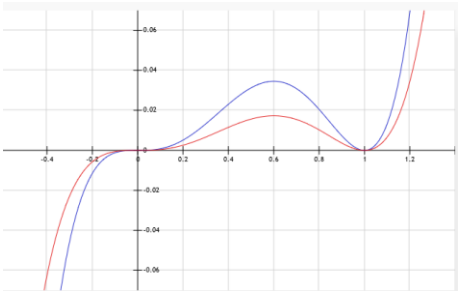
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

(2.) Symmetrien: Keine, da die Exponenten ungerade und gerade sind!

(3.) Nullstellen:

$x^3(x-1)^2=0$
$\Rightarrow x*x*x*(x-1)*(x-1)=0$
$\Rightarrow x=0 \vee x=0 \vee x=0 \vee x=0 \vee x-1=0 \vee x-1=0$
$N_1(0/0)$; $N_2(1/0)$
VF: 3; VF:2

(4.) Zeichnen von zwei möglichen Verläufen:



(b.) $f(x) = 4x^4(x^3-1) = 4x^5-4x^2$

(1.) Uneigentliche Grenzwerte(Kurzform!!):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

(2.) Symmetrien: Keine, da die Exponenten ungerade und gerade sind!

(3.) Nullstellen:

$4x^4(x^3-1) = 0$

$4*x*x*x*x\,(x^3-1) = 0$

$x=0 \vee x=0 \vee x=0 \vee x=0 \vee x^3-1 = 0$

$x=0 \vee x=0 \vee x=0 \vee x=0 \vee x = 1$

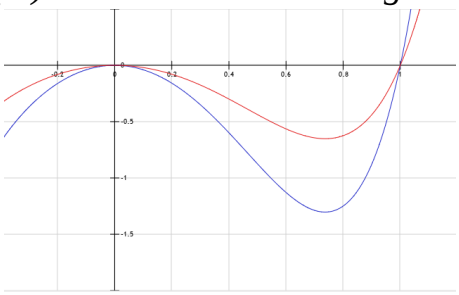
$N_1(0/0)$; $N_2(1/0)$

VF: 4; VF:1

$$\cancel{f(x)=4(x-0)\,(x-0)\,(x-0)\,(x-0)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$f(x)=4(x-0)\,(x-0)\,(x-0)\,(x-0)(x-1)(???)$

(4.) Zeichnen von zwei möglichen Verläufen:



$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$1*x^3+0*bx^2+c*x-1=0$$

$$\overset{TR}{\Longrightarrow} x=1 \vee x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \vee x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Polynomdivision

Primfaktorzerlegung:

$120 = 2*60 = 2*2*30 = 2*2*2*15 = 2*2*2*3*5$

120:2=60

Linearfaktorzerlegung:

$f(x) = x^3-10x^2+31x-30$

Ziel: $x^3-10x^2+31x-30 = (x-a)(x-b)(x-c)$

Nullstellen

$1* x^3-10x^2+31x-30 =0$

1 **ganze Zahlen**

Voraussetzungen:
- **Alle Koeffizienten ganzzahlig**
- **Vor dem x^3: Faktor 1**

Wenn es eine ganze Zahl gibt, die Nullstelle von f ist, dann teilt diese Zahl den Koeffizienten ohne x!

I. Schritt: Eine Nullstelle ermitteln!

Alle Nullstellen können Teiler von 30 sein!

Mögliche Nullstellen: $T_{30}=\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15; \pm30\}$

Probieren:

$f(1)=-8$ => *Keine Nullstelle*

$f(2)=0$ => *Nullstelle!*

Zwischenergebnis: $x^3-10x^2+31x-30 = (x-2)(x-b)(x-c)$

II. Schritt: Polynomdivision

$(x^3-10x^2+31x-30) : (x-2) = (x-b)(x-c)$

$(x^3-10x^2+31x-30) : (x-2) = x^2-8x+15$

$\underline{-(x^3-2x^2)}$ **$x^2(x-2)$**

$-8x +31x$

$\underline{-(-8x+16x)}$ **$-8x(x-2)$**

$15x - 30$

$\underline{-(15x - 30)}$ **$15(x-2)$**

0

Zwischenergebnis: $x^3-10x^2+31x-30 = (x-2)(x^2-8x+15)$

Schriftliches Dividieren:

```
 62228 : 47 = 1324
-47
 152
-141
   112
   -94
    188
   -188
      0
```

III. Schritt: Zerlegung des Restpolynoms

$x^2-8x+15= (x-3)(x-5)$ *Satz von Vieta oder TR!*

Endergebnis: $x^3-10x^2+31x-30 = (x-2)(x-3)(x-5)$

Damit sind die Nullstellen: $N_1(2/0)$; $N_2(3/0)$; $N_3(5/0)$

Beispiel 2:

$f(x) = x^3-27$

```
(x^3                - 27) : (x - 3)  =  x^2 + 3x + 9
 x^3  - 3x^2
 ------------------------
        3x^2        - 27
        3x^2  - 9x
        ------------------
                9x  - 27
                9x  - 27
                ----------
                       0
```

Beispiel 3:

I. Erstellung der Aufgabe:

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5) = x^4-11x^3+41x^2-61x+30$

II. Lösen der Aufgabe:

$f(x) = x^4-11x^3+41x^2-61x+30$

1. Polynomdivision:

Alle Nullstellen können Teiler von 30 sein!

Mögliche Nullstellen: $T_{30}=\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15; \pm30\}$

Probieren:

$f(1)=0$ => *Nullstelle!*

```
(x^4  - 11x^3  + 41x^2  - 61x  + 30) : (x - 1)  =  x^3 - 10x^2 + 31x - 30
 x^4  -   x^3
 ------------------------------------
      - 10x^3  + 41x^2  - 61x  + 30
      - 10x^3  + 10x^2
      ------------------------------
                 31x^2  - 61x  + 30
                 31x^2  - 31x
                 ------------------
                        - 30x  + 30
                        - 30x  + 30
                        -----------
                                 0
```

Zwischenergebnis: $x^4-11x^3+41x^2-61x+30= (x-1)(x^3-10x^2+31x-30)$

2. Polynomdivision: Wie oben bei Beispiel 1 ergibt sich durch weiterrechnen:

$(x^3-10x^2+31x-30) : (x-2)= x^2-8x+15$

$x^2-8x+15= (x-3)(x-5)$

Endergebnis: $x^4-11x^3+41x^2-61x+30= (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$

Damit sind die Nullstellen: $N_1(1/0)$; $N_2(2/0)$;$N_3(3/0)$; $N_4(5/0)$